



## CAMPBELL'S DIAGRAM FOR FLEXIBLE BLADES CRITICAL FREQUENCIES - THEORY AND EXPERIMENT

**Ilmar Ferreira Santos**  
**Cristina Minioli Saracho**

Universidade Estadual de Campinas, Faculdade de Engenharia Mecânica, Departamento de Projeto Mecânico, CEP 13083-970, Campinas, SP, Brasil

e-mail:ilmar@fem.unicamp.br

e-mail:saracho@fem.unicamp.br

**Resumo.** *Natural frequencies of flexible blades are calculated, among other reasons, to avoid large vibration amplitudes and high stress levels in the range of regular operation of rotating machines. Critical speeds are usually determined with help of the Campbell's diagram, in which the blades natural frequencies behaviour as function of the rotor angular velocity can be analysed. In this work, the blade mathematical representation is obtained using the Finite Element Method (FEM) with a three-dimensional model. After adjusting the parameters of the FEM model by using measured natural frequencies from blades in a free-free configuration, the blades are directly clamped at an industrial compressor. The natural frequencies are once again analysed in this new boundary conditions, theoretically as well as experimentally, to ensure the model accuracy. These measurements allows the estimation of blade root stiffness values. Afterwards, numerical simulations are then performed to investigate the influence of the angular velocity on the blade natural frequencies using two different conditions of blade's attachment: an ideal clamping and an adjusted value of the root stiffness. The resulting Campbell Diagram provides a simple and useful approach to estimate the root stiffness while the rotor is operating.*

**Palavras-chave:** *Palhetas Flexíveis, Diagramas de Campbell, Dinâmica de Rotores*

### 1. INTRODUÇÃO

As palhetas flexíveis representam a parte mais crítica no projeto de máquinas rotativas, devido às suas complexas formas geométricas e às altas velocidades de rotação a que estão sujeitas. Em muitos casos, o projeto da palheta é ainda realizado de maneira empírica, a partir de sucessivas alterações da sua geometria e posterior verificação em testes em túneis de vento ou cálculos do fluxo através da palheta (Demeulenaere e Braembussche, 1998). As palhetas são componentes que estão sujeitos a grandes níveis de tensão, devido aos grandes deslocamentos resultantes de vibrações e altas forças cen-

trífugas. A análise completa e global das vibrações em palhetas girantes se torna um problema complexo e multidisciplinar, envolvendo a interação entre a mecânica dos sólidos e dinâmica de fluido computacional. Do ponto de vista teórico, tanto o comportamento de palhetas flexíveis quanto da dinâmica de fluido computacional são atualmente modeladas pelo Método dos Elementos Finitos, utilizando computadores de alta performance para superar os grandes tempos de processamento envolvidos. Do ponto de vista experimental, a análise envolve a transmissão de dados medidos por telemetria (Zierbarth, 1997) de um sistema de referência girante, onde as palhetas estão afixadas, para o sistema de referência inercial, onde os sinais podem ser processados e analisados.

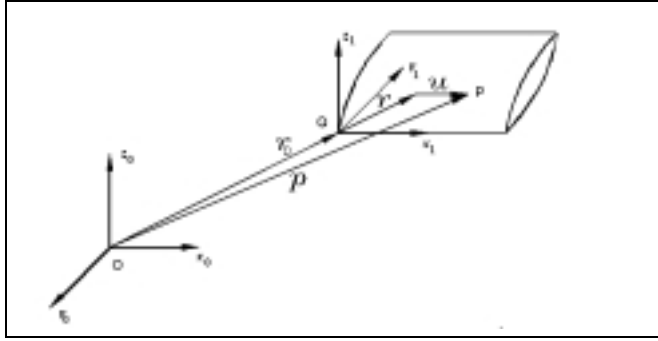
O comportamento dinâmico das palhetas, sem considerar as vibrações do rotor, tem sido investigadas por muitos autores, tanto teoricamente (Henry e Lalanne, 1974; Leissa, 1981; Leissa e Ewing, 1983; Hsieh e Abel, 1995), quanto experimentalmente (Nava, Paone, Rossi e Tomasini, 1994; Fan, Ju e Tsuei, 1994). Os modelos teóricos disponíveis em geral utilizam o Método dos Elementos Finitos e foram desenvolvidos utilizando modelos unidimensionais, bidimensionais ou ainda tridimensionais. O comportamento dinâmico da palheta, considerando as vibrações do rotor, torna-se um problema mais complicado, pois o número total de graus de liberdade é ampliado consideravelmente (Schaber e Stetter, 1993). Wiedemann e Gash (1993) investigou teoricamente o acoplamento entre as vibrações torsionais do rotor e das palhetas, apresentando uma técnica de redução do número de graus de liberdade, baseando-se em parâmetros modais. Santos e Colla (1997) investigaram tanto teórica quanto experimentalmente o acoplamento entre as vibrações de palhetas longas e os movimentos laterais do rotor.

Neste contexto, este trabalho apresenta uma contribuição prática ao problema de modelagem e análise de palhetas flexíveis, incluindo a discussão de procedimentos para uma análise teórica, experimental e do posterior ajuste do modelo teórico obtido. As equações de movimento utilizadas nesta análise são obtidas utilizando um modelo tridimensional discretizado pelo Método dos Elementos Finitos (Hsieh e Abel, 1995). A principal vantagem da utilização deste tipo de elemento é a possibilidade de modelar um perfil geométrico genérico da palheta. Não foram consideradas nesta análise a interação com o fluido ou o acoplamento da vibração das palhetas com a vibração do rotor. O modelo da palheta é investigado tanto teórica quanto experimentalmente, utilizando duas diferentes condições de contorno: (a) configuração livre-livre e (b) montada em um compressor industrial. Os resultados experimentais obtidos são utilizados para ajustar o modelo numérico. A partir destes resultados experimentais, obtidos com a palheta não-girante, também é possível estimar a rigidez do engaste da palheta no compressor. Após estimar os parâmetros do modelo (massa específica e módulo de Young), a influência da velocidade de rotação da máquina nas frequências naturais da palheta é analisada teoricamente a partir do modelo numérico previamente ajustado. A variação das frequências naturais em função da velocidade de rotação pode ser também observada em um diagrama, conhecido como Diagrama de Campbell. Neste diagrama também é apresentada a variação da velocidade de rotação, ou uma de suas múltiplas, o que depende do número total de palhetas em cada estágio da máquina. As frequências críticas são determinadas pelo pontos em que as duas linhas – variação das frequências naturais e variação da velocidade de rotação ou múltipla – se encontram. Neste tipo de análise, o rotor está operando em condições normais e as velocidades de rotação se encontram dentro da faixa de operação do compressor. Em geral, os resultados apresentados no diagrama de Campbell consideram que a palheta está idealmente acoplada ao compressor. Entretanto, no diagrama de Campbell apresentado, a variação das frequências naturais calculadas com o valor de rigidez estimado para o engas-

te também são apresentadas. Dessa forma, as frequências críticas não são determinadas por um único ponto apenas. Na verdade, este diagrama fornece uma região de frequências críticas em que as frequências naturais da palheta podem ser encontradas. Este tipo de abordagem, embora simples, é útil, pois a rigidez do engaste pode variar por diferentes razões durante a operação do compressor.

## 2. FORMULAÇÃO TEÓRICA

As equações de movimento da palheta são calculadas, baseando-se em métodos de energia e nas Equações de Lagrange. A energia cinética é a soma de uma parcela relativa às deformações elásticas e outra devido aos movimentos de corpo rígido do rotor. A energia potencial é a parcela relativa às deformações elásticas. O deslocamento da palheta é discretizado pela técnica dos elementos finitos utilizando um elemento de 20 nós. Inicialmente, dois sistemas de coordenadas são utilizados para descrever a cinemática da palheta. Um sistema inercial  $(xyz)_0$ , fixo no espaço, é definido com sua origem no centro  $O$  do rotor. Consecutivas rotações representando os movimentos de corpo rígido do rotor são utilizadas para definir o sistema de coordenadas auxiliar. Este segundo sistema  $(xyz)_1$  é fixo à palheta não-deformada e sua origem é definida no ponto  $Q$ , onde a palheta está montada no rotor. Este sistema auxiliar, que gira juntamente com a palheta, representa todas as movimentos do rotor e é relacionado com o sistema inercial através da matriz de transformação de coordenadas e do vetor de velocidade  $\omega$  do rotor (Saracho, 1998).



**Figura 1:** Vetores representando a posição de um ponto na palheta deformada

A posição de um ponto genérico  $Q$  na palheta deformada, como na figura (1), é dada por

$$\{p\} = \{r_0\} + \{r\} + \{u\} \quad (1)$$

Os vetores utilizados nesta formulação estão escritos no sistema de referência móvel  $(xyz)_1$ . Por simplicidade, supõe-se que o centro do rotor não possui deslocamento ou velocidade. Portanto, a velocidade absoluta do ponto  $Q$  é definida por

$$v = \{\omega\} \times (\{r_0\} + \{r\}) + (\{\dot{u}\} + \{\omega\} \times \{u\}) \quad (2)$$

A geometria e os deslocamentos  $\{u\}$ , que representam a deformação da palheta, são discretizados utilizando o Método dos Elementos Finitos. O vetor  $\{u\}$  pode ser escrito em função das funções de forma e dos deslocamentos nodais.

$$\{u\} = [N] \{q\} \quad (3)$$

Da mesma forma a perfil geométrico da palheta pode ser escrito em função das coordenadas nodais. Como a formulação empregada é isoparamétrica, as funções de forma utilizadas para discretizar o campo de deslocamento são as mesmas empregadas para discretizar o perfil geométrico. Assim,

$$\{r\} = [N] \{c\} \quad (4)$$

A velocidade absoluta pode ser então reescrita em função dos deslocamentos e coordenadas nodais, se a eq. (3) e (4) são introduzidas na eq. (2):

$$v = [\Omega] \{r_O\} + [\Omega] [N] \{c\} + [N] \{\dot{q}\} + [\Omega] [N] \{q\} \quad (5)$$

A matriz  $[\Omega]$  é formada pelos componentes do vetor de velocidade angular  $\omega$ :

$$[\Omega] = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

Portanto a expressão para a energia cinética de um elemento pode ser obtida usando a eq. (5):

$$T = \frac{1}{2} \int \rho \{v\}^T \{v\} dx dy dz \quad (7)$$

A energia potencial da palheta é calculada a partir de relações de deslocamento-deformação. O vetor de deformação  $\{\varepsilon\}$  é definido por

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, \varepsilon_{xy}, \varepsilon_{xz}, \varepsilon_{yz}\} \quad (8)$$

O vetor  $\{\varepsilon\}$  é dividido em duas partes : a primeira  $\{\varepsilon_L\}$  é o conhecido vetor de deformação linear e o segundo  $\{\varepsilon_{NL}\}$  inclui os termos não lineares, que devem ser considerados (Simo e Vu-Quoc, 1987). Se esses termos forem desprezados, as frequências naturais da palheta tendem a diminuir com o aumento da velocidade angular, em oposição ao efeito esperado fisicamente. Estes termos não-lineares estão relacionados à matriz de rigidez geométrica que corrige este efeito.

A expressão para a energia potencial é dada por

$$U = \frac{1}{2} \int \{\varepsilon\}^T [D] \{\varepsilon\} dV = \frac{1}{2} \int \{\varepsilon_L\}^T [D] \{\varepsilon_L\} dV + \int \{\varepsilon_L\}^T [D] \{\varepsilon_{NL}\} dV + \frac{1}{2} \int \{\varepsilon_{NL}\}^T [D] \{\varepsilon_{NL}\} dV \quad (9)$$

Nesta equação a relação entre a deformação e tensão  $\{\sigma\} = [D] \{\varepsilon\}$  foi utilizada. Nesta análise, o terceiro termo da eq. (9) é desprezado. O vetor de deformação é escrito em função dos deslocamentos nodais e das derivadas das funções de forma

$$\{\varepsilon_L\} = [B] \{q\} \quad (10)$$

E a energia potencial é dada por

$$U = \frac{1}{2} \int \{q\}^T [B]^T [D] [B] \{q\} dx dy dz + \int \{q\}^T [B]^T [D] \{\varepsilon_{NL}\} \quad (11)$$

As Equações de Lagrange determinam o ponto em que o funcional de energia é mínimo:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} + \frac{\partial U}{\partial q} = 0 \quad (12)$$

Assim as equações de movimento da palheta são dadas por

$$[M] \{\ddot{q}\} + [G] \{\dot{q}\} + ([K] + [K_G(q)] - [K_r]) \{q\} = \{f_\Omega\} \quad (13)$$

onde

$[M] = \int \rho [N]^T [N] dx dy dz$  é a matriz de massa;  
 $[G] = 2 \int \rho [N]^T [\Omega] [N] dx dy dz$ , é a matriz giroscópica;  
 $[K] = \int [N]^T [D] [N] dx dy dz$ , é a matriz de rigidez estrutural;  
 $[K_G(q)]$ , é a matriz de rigidez geométrica;  
 $[K_r] = \int \rho [N]^T [\Omega]^2 [N] dx dy dz$ , é a matriz de rigidez rotacional  
e  
 $\{f_\Omega\} = \int \rho [N]^T [\Omega]^2 [N] (\{c\} + \{c_O\}) dx dy dz$ , o vetor de força centrífuga.

A matriz de rigidez geométrica depende do deslocamento em cada instante de tempo e o problema é não-linear (Simo e Vu-Quoc, 1987). Entretanto, na análise de frequências o problema é linearizado e assume-se que a palheta oscila linearmente em torno de uma posição de equilíbrio, quando o rotor opera com velocidade constante. Dessa forma, a matriz de rigidez geométrica torna-se constante e pode ser calculada a partir da distribuição inicial de tensão ao longo da palheta, devido à aceleração centrífuga. A posição de equilíbrio da palheta deformada é dada por

$$([K] - [K_r]) \{q^0\} = \{f_\Omega\} \quad (14)$$

A distribuição inicial da tensão é calculada a partir do vetor de deslocamento  $\{q^0\}$ . O problema de autovalores e autovetores associado, desprezando a matriz de rigidez geométrica, é dado por

$$\left( [M] \lambda^2 + ([K] + [K_G] - [K_r]) \right) \{\Phi\} = 0 \quad (15)$$

Este problema de autovalores e autovetores pode ser resolvido utilizando o método de iteração por sub-espaco (Bathe, 1982), para calcular apenas as primeiras frequências naturais da palheta. Para a palheta não girante, as primeiras frequências são calculadas a partir de um problema comum de autovalores e autovetores, pois a matriz de rigidez é dada apenas pela matriz de rigidez estrutural. Entretanto, na análise da palheta rotativa, a solução é obtida em duas etapas. Inicialmente, a posição de equilíbrio position, vetor  $\{q^0\}$ , devido à força centrífuga (eq. 14). Então a matriz de rigidez geométrica é calculada utilizando o estado inicial de tensão devido a este vetor de deslocamento. As

freqüências naturais são calculadas usando estas três matrizes de rigidez: estrutural, rotacional e geométrica, de acordo com a eq. (15). Estas equações e o método de iteração por subespaço foram implementados em ambiente Matlab.

### 3. TESTES REALIZADOS

O modelo matemático apresentado anteriormente foi implementado usando o programa Matlab. Este programa foi utilizado para analisar o comportamento dinâmico das palhetas de um compressor industrial. Este compressor é constituído de doze estágios, cada qual formado por 42 palhetas flexíveis. O principal objetivo deste estudo é verificar, para cada um dos estágios do compressor, se as freqüências naturais da palheta podem ser excitadas pela velocidade de rotação ou uma de suas múltiplas (super-harmônicas)

Inicialmente, é apresentado um procedimento para o ajuste do modelo numérico da palheta, utilizando os dados obtidos a partir das medidas experimentais. Essas medidas foram obtidas em duas condições de contorno diferentes: palheta livre-livre e palheta montada em um compressor industrial. A figura 2 apresenta a palheta na configuração livre-livre, enquanto que a figura 3 apresenta a palheta montada diretamente em um compressor industrial. Estas medidas foram realizadas usando martelos de impacto e sinais de aceleração, que foram posteriormente processados em um computador PC (de acordo com a figura 2).



**Figura 2:** Palheta na configuração livre-livre



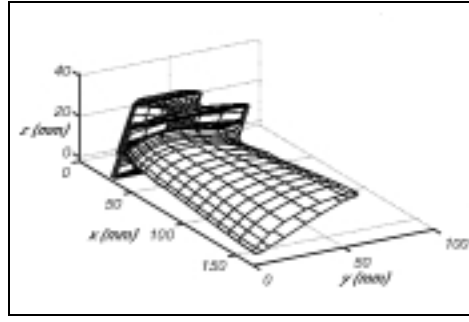
**Figura 3:** Palhetas montadas diretamente em um compressor industrial

### 4. AJUSTE DO MODELO

O perfil da palheta também foi medido experimentalmente. Os pontos obtidos foram utilizados para construir a malha para análise pelo método dos elementos finitos. O modelo discretizado apresenta 108 elementos (2322 graus de liberdade) conforme mostrado na figura 4. As freqüências naturais da palheta obtidas experimentalmente em uma configuração livre-livre (de acordo com a figura 3) são utilizadas para obter o modelo numérico ajustado da palheta.

O primeiro parâmetro a ser ajustado é densidade do material. Este parâmetro pode ser obtido medindo-se o peso ( $kg$ ) da palheta e então dividindo pelo volume calculado pelo modelo discretizado. O resultado é a densidade do material  $\rho = 7520kg/m^3$ .

O segundo parâmetro de ajuste é o módulo de Young da palheta. Os valores usuais para este material estão na faixa de  $1.9 \cdot 10^{11} N/m^2$  a  $2.2 \cdot 10^{11} N/m^2$ . Comparando as freqüências obtidas experimentalmente (figura 2) com as simulações numéricas realizadas



**Figura 4:** Representação da malha da palheta utilizada na implementação numérica

com valores de  $E$  dentro desta faixa, foi estimado que um valor de  $E = 2.1 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$  ajusta as três primeiras frequências naturais da palheta, como pode ser visto na tabela 1. Nestas simulações o coeficiente de Poisson foi escolhido como  $\nu = 0.27$ .

Após ajustar os parâmetros modais, a influência da rigidez do engaste será inestigada. Como primeira aproximação, o acoplamento da palheta ao compressor pode ser aproximado idealmente por uma mola de rigidez infinita. Os resultados na tabela 2 apresentam a comparação entre as frequências medidas com a palheta montada no compressor (figura 3) e as frequências calculadas numericamente adotando este engastamento ideal.

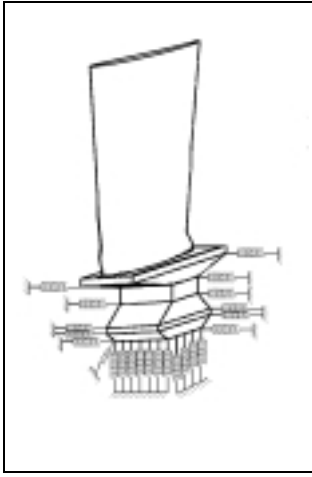
**Tabela 1:** Frequências teóricas e experimentais – configuração livre-livre utilizando  $E = 2.1 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$

Teor.	Exp.	Erro
2132 Hz	2066 Hz	3.2 %
3321 Hz	3203 Hz	3.7 %
5803 Hz	5594 Hz	3.7 %

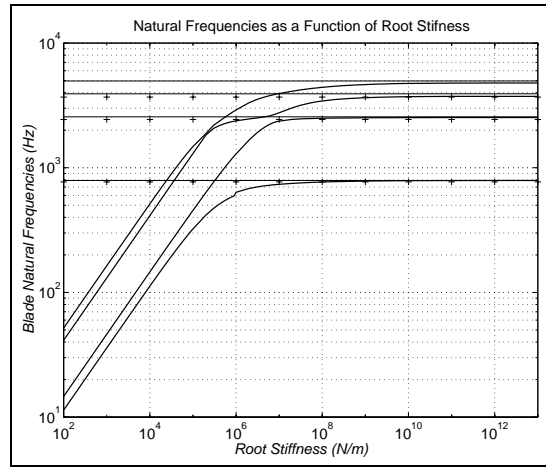
**Tabela 2:** Frequências teóricas e experimentais – palhetas montadas no compressor industrial (condições ideais de engaste)

Theor.	Exp.	Error
790 Hz	770 Hz	2.6 %
2561 Hz	2440 Hz	4.9 %
3920 Hz	3690 Hz	6.2 %

Entretanto em outra aproximação, o engaste da palheta no compressor pode ser modelado por molas. Neste tipo de modelo a palheta é conectada ao compressor por meio de molas nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$ , como pode ser observado na figura 5. Variou-se a rigidez destas molas entre  $k = 0$  até  $1 \cdot 10^{13} \text{ N/m}$ . As frequências naturais das palhetas foram então calculadas com diferentes valores de  $k$ . Um diagrama pode ser construído mostrando a influência da rigidez do engaste nas frequências naturais da palheta. A partir da figura 6, é possível estimar um valor apropriado de  $k$  (rigidez da mola) que melhor aproxima as frequências medidas da palheta montada no compressor. Com este diagrama é possível calcular os valores de  $k$  que resultam em uma aproximação mais adequada no engaste real da palheta no compressor. Deste diagrama foram escolhidos três valores de  $k$  que ajustam as três primeiras frequências naturais da palheta, conforme apresentado na tabela 3. O valor  $k_1 = 2 \cdot 10^7 \text{ N/m}$ , ajusta precisamente a segunda frequência, o valor  $k_2 = 1 \cdot 10^8 \text{ N/m}$ , a primeira frequência e o valor  $k_3 = 3 \cdot 10^9 \text{ N/m}$ , a terceira. A informação mais importante obtida da tabela 3 e da figura 6 é a definição de uma faixa de valores na qual a rigidez equivalente do engaste da palheta da palheta no compressor deve estar compreendida, resultando num modelo numérico bastante preciso.



**Figura 5:** Palheta suportadas por molas, simulando a condição de engastamento



**Figura 6:** Comportamento das frequências naturais da palheta em função da rigidez do engaste.

**Tabela 3:** Frequências teóricas e experimentais [Hz] em função da rigidez do engaste:  $k_1 = 2 \cdot 10^7$ ;  $k_2 = 1 \cdot 10^8$  N/m;  $k_3 = 3 \cdot 10^9$  N/m – diferença entre as frequências teóricas e experimentais [%]

Exp. [Hz]	$k_1$	Erro [%]	$k_2$	Erro [%]	$k_3$	Erro [%]
<b>770</b>	749	2.6	<b>768</b>	0.2	785	-1.9
<b>2440</b>	<b>2443</b>	-0.2	2494	-2.2	2520	-3.3
<b>3690</b>	3020	18.1	3434	6.9	<b>3687</b>	0.1

## 5. DIAGRAMAS DE CAMPBELL

O modelo previamente ajustado e os resultados obtidos para a rigidez do engaste da palheta no compressor serão utilizados na análise dinâmica de palhetas girantes. As frequências naturais são calculadas utilizando a equação (15), utilizando um procedimento iterativo para calcular a posição de equilíbrio da palheta devido à força centrífuga.

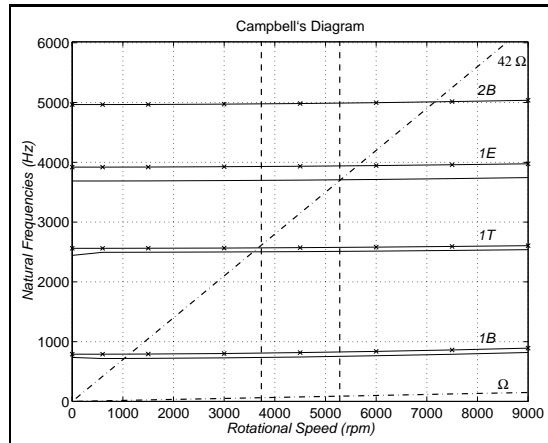
As frequências naturais são calculadas em função da velocidade de rotação que se encontram na faixa de operação da máquina. A partir desses resultados os Diagramas de Campbell das palhetas é construída. O Diagrama de Campbell para a condição de regime permanente (velocidade constante) é calculado incluindo as frequências naturais considerando tanto a rigidez ideal (diagrama convencional) quanto a rigidez estimada para o engaste. As frequências naturais são apresentadas em um gráfico em função da velocidade de rotação. Neste diagrama a fonte de excitação é a velocidade de rotação multiplicada por 42, que corresponde ao número de palhetas direcionadoras de fluxo (palhetas fixas). A velocidade de rotação sozinha é muito baixa para excitar as frequências naturais da palheta.

Neste diagrama as frequências naturais da palheta são apresentadas em duas linhas diferentes para cada um dos modos de vibração, conforme apresentado na figura 7. Os quatro primeiros modos de vibração estão incluídos nesta diagrama. O primeiro modo corresponde ao primeiro modo de flexão (1B), enquanto que o segundo corresponde ao primeiro modo de torção (1T). O terceiro modo é modo conhecido como *edgewise bending mode* (1E) e o quarto modo de vibração é o segundo modo de flexão (2B). Devido ao



ângulo de pré-torsão da palheta, os terceiros e quarto modos são levemente acoplados.

Para cada um destes modos, a linha mais alta do diagrama de Campbell corresponde às frequências naturais calculadas com a rigidez infinita no engastamento (condição ideal) e a mais baixa corresponde às frequências naturais calculadas usando a rigidez ajustada para cada um dos modos de vibração. Os valores de rigidez correspondem aos valores calculados anteriormente e apresentados na tabela (3). Dessa maneira é possível definir uma região onde as frequências críticas da palhetas estão localizadas. Este tipo de aproximação permite incluir a variação da rigidez do engaste que possa ocorrer durante a operação da máquina, como resultado, por exemplo, de deformações causadas pelo calor.



**Figura 7:** Diagrama de Campbell para uma condição de operação normal do compressor

Este compressor opera com velocidades entre 3733 e 5282 rpm em condições normais de operação. Estes limites são representados por linhas verticais na figura 7.

## 6. CONCLUSÕES

Um procedimento para ajustar o modelo de uma palheta é apresentado para duas diferentes condições de contorno: livre-livre e montada em um compressor. Foi adotado que as palhetas estão conectadas ao compressor através de molas. Comparando as frequências naturais da palheta, calculadas numericamente e experimentalmente, é possível estimar uma faixa de valores para a rigidez do engaste da palheta no compressor.

Os diagramas de Campbell da palheta girante são também representadas são apresentados definindo uma faixa de frequências em que as frequências críticas da palheta estão localizadas, dependendo da rigidez do engaste estimado para cada um dos três primeiros modos de vibração. O Diagrama de Campbell resultante fornece uma aproximação simples e útil para estimar a rigidez do engaste, enquanto o rotor opera à velocidade constante.

### *Agradecimentos*

O CNPq (Conselho Nacional de Pesquisa e Desenvolvimento), PETROBRAS (Petróleo do Brasil S/A) são agradecidas pelo apoio dado a este projeto

## REFERÊNCIAS

- Bathe, K. J. (1982), *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*, Prentice-Hall, New Jersey.
- Demeulenaere, A. e Braembussche, R. V. D. (1998), 'Three-dimensional inverse method for turbomachinery blading design', *Journal of Turbomachinery* **120**, 247–255.
- Fan, Y., Ju, M. e Tsuei, Y. (1994), 'Experimental study on vibration of a rotating blade', *Journal of Engineering for Gas Turbine and Power* **116**, 672–677.
- Henry, R. e Lalanne, M. (1974), 'Vibration analysis of rotating compressor blades', *Journal of Engineering for Industry - Transactions of American Society of Mechanical Engineering* **96**(3), 1028–1035.
- Hsieh, S. H. e Abel, J. F. (1995), 'Comparison of two finite element approaches for analysis of rotating bladed-disk assemblies', *Journal of Sound and Vibration* **182**(1), 91–107.
- Leissa, A. W. (1981), 'Vibrational aspects of rotating turbomachinery blades', *Applied Mechanics Reviews* **34**(5), 629–635.
- Leissa, A. W. e Ewing, M. S. (1983), 'Comparison of beam and shell theories for the vibration of thin turbomachinery blades', *Journal of Engineering for Power - Transactions of the American Society of Mechanical Engineering* **105**, 383–392.
- Nava, P., Paone, N., Rossi, G. e Tomasini, E. (1994), 'Design and experimental characterization of a nonintrusive measurement system of a rotating blade measurement', *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power - Transactions of the American Society of Mechanical Engineering* **116**(0), 657– 662.
- Santos, I. F. e Colla, G. C. (1997), 'Influência de palhetas flexíveis na dinâmica de sistemas rotativos', in 'XIV Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica (Anais, CD-Rom)'.  
Saracho, C. M. (1998), 'Análise numérica e experimental do comportamento dinâmico de palhetas flexíveis', Master's thesis, Faculdade de Engenharia Mecânica – Unicamp.
- Schaber, U. V. e Stetter, H. (1993), 'Berechnung gekoppelter schwingungen von welle und beschau felung in tubomaschinen', in 'SIRM'93 – Schwingungen in Rotierenden Maschien', pp. 226–233.
- Simo, J. C. e Vu-Quoc, L. (1987), 'The role of non-linear theories in transient dynamic analysis of flexible structures', *Journal of Sound and Vibration* **119**(3), 487–508.
- Wiedemann, M. e Gash, R. (1993), 'Rotor-blatt-kopplung', *Archive of Applied Mechanics* **63**.
- Zierbarth, V. H. (1997), 'Kopplung von wellentorsion und schaufelbiegung - berechnung und messung', in 'SIRM'97 - Schwingungen in Rotierenden Maschinen'.